Contrôle Continu (6/12/21)

Durée : 1h30
Documents, téléphones portables et appareils électroniques interdits
La redaction et la clarté de l'argumentation sera prise en compte dans la notation
*Les deux questions avec un * sont plus difficiles et sont en bonus*

Exercice 1 (Autour du cours) Soient A un anneau factoriel et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X]$ un polynôme non constant. Montrer que les racines de P dans $\mathrm{Fr}(A)$ sont de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in A$ premiers entre eux, p un diviseur de a_0 et q un diviseur de a_n.

Exercice 2 (Racine de puissances premières entre elles)
Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers premier entre eux.

1) Montrer, sans chercher à l'expliciter et en utilisant les propriétés du corps $\mathbb{C}$, qu'il existe $\alpha_{mn} \in \mathbb{C}$ tel que $(\alpha_{mn})^{mn} = a$ (i.e. α_{mn} est une racine mn-ième de a).

2) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha_{mn})$ contient une racine de $X^m - a$ et une racine de $X^n - a$. On les dénotera respectivement α_m et α_n dans la suite.

3) Montrer proprement les inégalités suivantes.

$$[\mathbb{Q}(\alpha_{mn}) : \mathbb{Q}] \leq mn, \tag{1}$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha_m) : \mathbb{Q}] \leq m, \tag{2}$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}] \leq n, \tag{3}$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha_{mn}) : \mathbb{Q}(\alpha_m)] \leq n, \text{ et,} \tag{4}$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha_{mn}) : \mathbb{Q}(\alpha_n)] \leq m. \tag{5}$$

4) On suppose ici que $X^m - a$ et $X^n - a$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.
   a) Montrer que les inégalités (2) et (3) sont des égalités.
   b) En déduire que m et n divisent $[\mathbb{Q}(\alpha_{mn}) : \mathbb{Q}]$.
   c) En déduire que (1) est une égalité.
   d) En déduire que $X^{mn} - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

5) On suppose ici que $X^{mn} - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   a) Montrer que (1) est une égalité.
   b) En déduire que (2) et (3) sont des égalités.
   c) En déduire que $X^m - a$ et $X^n - a$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

6*) Étudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ des polynômes $X^{15} + 4$ et $X^{14} - 8$.

Exercice 3 (Quelques éléments algébriques sur $\mathbb{Q}$)
Montrer que les éléments suivants sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et donner, en le justifiant, leurs polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$.

1) $\sqrt[4]{2}$.
2) $\sqrt{2} - 2$.
3*) $(1 + i)\sqrt{3}$.

Exercice 4 (Morphismes de corps)
Déterminer, en le justifiant proprement, tous les morphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ vers $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$. *on pourra écrire l'image de $\sqrt{15}$ par un tel morphisme sous la forme $a + b\sqrt{17}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.*